INSTITUT DES HAUTES ETUDES

POUR LE DEVELOPPEMENT DE LA CULTURE, DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE EN BULGARIE

http ://www.iheb.org/

Concours Général de Physique "Minko Balkanski"

11 Mai 2014

Прочетете внимателно!

Част първа и част втора съдържат условията на четирите задачи съответно на френски и английски език. Част трета съдържа фигурите използвани за онагледяване на въпросите и помощни таблици и формули. Единствените външни документи, на които имате право са френски и английски речници. Ако желаете, можете да ползвате калкулатори.

За много от задачите ще Ви е необходимо да ползвате формулите дадени в анекса.

При оценяването на задачите голяма тежест ще имат *яснотата и стилът* на изложените решения и аргументация. Не използвайте излишна проза в аргументите си, бъдете точни и *кратки*. Използването на схеми за онагледяване на разсъжденията Ви е желателно. *Пишете само на езика, който сте избрали* (френски или английски).

Задачите дават еднакъв брой точки.

При намиране на грешка в условията на задачите отбележете я в работата си и продължете *без да повдигате въпроси към квесторите*.

Решенията ще бъдат изложени на сайта на Фондация Миню Балкански в деня на състезанието. Класирането ще бъде изложено също там месец по-късно. Ако имате въпроси и коментари можете да ги насочите към stefan.krastanov@yale.edu. С първенците ще се свържем чрез e-mail или по телефон. Бъдете сигурни да попълните правилно информацията за контакт.

Разполагате с 4 часа. Успех!

Première partie
Français

1 La bobine Tesla

Les bobines Tesla sont des transformateurs à courant alternatif qui fonctionnent à la fréquence de résonance du circuit afin d'obtenir une tension maximale dans le secondaire du transformateur. Ici, nous allons examiner un modèle simple d'un tel transformateur.

1.1 Le système

Considérons un circuit RLC, c'est à dire un circuit dans lequel une inductance L, un condensateur C et une résistance R sont placés en série dans un circuit fermé. La tension sur l'inductance est U_0. Le condensateur n'est pas chargé.

1. Déduire une équation différentielle linéaire pour la tension sur le condensateur.
2. Trouver la solution de l'équation ? Vous pouvez supposer que la solution est une fonction harmonique (sinus ou cosinus) du temps.

1.2 Forçage

Supposon qu'il y a un flux $\Phi(t) = \Phi_0 sin(\omega t)$ traversant l'inductance.

1. Donner la nouvelle équation différentielle linéaire pour le système.
2. La solution de cette équation contient deux parties : une transitoire qui s'éteint et une partie à l'état stationnaire. Nous allons étudier la partie stationnaire en détail.
3. Pourquoi la partie transitoire s'éteint ?
4. Donner la partie à état stationnaire ? Vous pouvez supposer que la solution est une fonction harmonique (sinus ou cosinus) du temps, avec une amplitude décroissante.

1.3 Réponse

1. Dessiner l'amplitude de la partie stationnaire en fonction de ω.
2. Trouver la fréquence ω_{max} à laquelle l'amplitude de l'état stationnaire est maximale.

1.4 Déchargement

Considérons la décharge électrique à travers les plaques du condensateur. Lorsque la tension sur le condensateur atteint une valeur suffisamment élevée, l'air entre les plaques du condensateur s'ionise et devient conducteur (résistance $r \ll R$). Considérez que la rupture se produit lorsque la tension est maximale.

1. Ecrire l'équation différentielle décrivant le déchargement. Utilisez le fait que$r \ll R$.
2. Dans quelles conditions peut-on négliger aussi l'inductance lors de la décharge ?
3. Nous pouvons appliquer les approximations précédentes. Quelle est l'équation différentielle simplifiée décrivant le déchargement ? Quelle est la solution de cette équation différentielle.
4. Sur le schéma de la bobine de Tesla que vous voyez dans la figure, désigner le condensateur C, la résistance r, la résistance R et l'inductance L.

2 Courants de Foucault et chauffage par induction

Les courants de Foucault sont des courants induits dans un conducteur par des champs magnétiques dépendant du temps. Des systèmes industriels construits autour de ce principe sont utilisés pour le chauffage sans contact, en particulier lorsque la pureté de l'échantillon est importante. Ici, nous allons considérer une version simplifiée d'un tel système.

2.1 Le système

Considérons un solénoïde infini avec une densité linéaire de boucles n et de rayon R. Un courant I parcourt le solénoïde.

1. Trouver le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde et démontrer que le champ est nul à l'extérieur.
2. Considérons la même configuration, mais avec un courant en fonction du temps $I(t) = I_0 cos(\omega t)$.
3. Trouver le champ électrique induit à l'intérieur et à l'extérieur du solénoïde.

2.2 Chauffage

Considérons un cylindre métallique infini placé de manière coaxiale à l'intérieur du solénoïde. La résistivité du métal est ρ. Le cylindre est de rayon r.

1. Trouver la densité de courants induits dans le cylindre, en présence du champ électrique de la question précédente. En déduire la densité d'énergie déposée en chaque point du cylindre métallique.
2. Quelles approximations ont été faites jusqu'à présent ? Comment motivez-vous ces approximations ?

2.3 Puissance fournie

Que devez vous faire afin de calculer la puissance fournie à un tel système ? Vous n'êtes pas tenu d'effectuer le calcul.

3 Trajectoire d'une comète dans un nuage de poussière

N'hésitez pas à utiliser les formules prévues dans l'annexe.
Considérons un nuage interstellaire sphérique homogène de densité ρ et de rayon R.

3.1 A l'intérieur du nuage

1. Quel est le champ gravitationnel à l'intérieur et à l'extérieur du nuage ?
2. Considérons une comète voyageant à l'intérieur du nuage. Le nuage est suffisamment dispersé pour que la comète ne change pas sa masse initiale m. La vitesse minimale de la comète sur sa trajectoire est v_0. Sa distance maximale du centre du nuage est $r_0 < R$. La comète est beaucoup plus légère que le nuage. Quelle est la trajectoire (position en fonction du temps) de la comète ?

3.2 A l'extérieur du nuage

Considérons$r_0 > R$. Décrire la partie de la trajectoire qui est en dehors du nuage (cette fois, il n'a pas besoin de considérer la dépendance du temps, juste donner la trajectoire comme une figure géométrique) ?

3.3 La trajectoire complète

1. À un certain point, la comète atteindra la limite du nuage. Quel est l'angle entre$\vec{r}_{apo}$ (le rayon vecteur de la comète à une distance maximale du centre du nuage) et $\vec{r}_{cross}$ (le rayon vecteur de la comète en traversant la frontière) ?
2. Quel est l'angle entre les deux "apoapsis" consécutifs (i.e. points de distance maximale du centre du nuage) ?
3. Dessiner un exemple de trajectoire pour ce système.

4 Bande passante de fibres optiques

Considérons une fibre optique constituée d'un noyau de rayon r et d'un manchon extérieur s'étendant à partir de r à R. Le noyau a un indice de réfraction n_0 et le manchon a un indice de réfraction n_1. La longueur de la fibre est L.

4.1 Entrée de données

1. Pour que la fibre optique fonctionne, qui devrait être plus petit, n_0 ou n_1 ?
2. Quel est l'angle maximal auquel la fibre va accepter l'entrée (à partir de l'air) ?

4.2 Bande passante

Considérons une impulsion lumineuse de durée τ. La lumière est en un faisceau divergent avec un angle de divergence égal à l'angle maximal d'acceptation à l'entrée.

1. Quelle est la durée d'impulsion à l'extrémité de la fibre ?
2. Quel est le débit de données maximal de la fibre (en bits par unité de temps) ?
3. Pour $n_{0/1} = 1.3 \; et \; 1.8$, $r = 0.5mm$ et dans les deux cas $L = 1m$ et $L = 1km$, donner une valeur numérique pour le débit de données.
4. Commenter cette valeur comparée à la limite imposée par la nature ondulatoire de la lumière (envisager lumière rouge) ?
5. Pouvons-nous obtenir un meilleur débit de données si nous avons trois matériaux au lieu de deux ?

Part II
English

1 Tesla Coil

Tesla Coils are AC transformers which work at the resonant frequency of the circuit in order to achieve maximal voltage in the secondary winding of the transformer. Here we will look at a simple model of such a transformer.

1.1 Initial Setup

Consider an RLC circuit, i.e. a circuit in which an inductor L, a capacitor C and a resistor R are placed in series in a closed circuit. Initially there is voltage U_0 on the terminals of the inductor and zero charge on the capacitor.

1. Derive a linear differential equation for the voltage on the capacitor?
2. What is the solution of the equation? You can assume it is a harmonic (sine or cosine) function of time.

1.2 Drive

Now consider that there is flux $\Phi(t) = \Phi_0 sin(\omega t)$ passing through the inductor.

1. Write the new linear differential equation for the system.
2. The solution of this equation contains two parts: a transient that dies out and we do not care about and a steady-state part that we will study in more details. Why is the transient dying out?
3. What is the steady-state part of the solution? You can assume it is a harmonic (sine or cosine) function of time, with decreasing amplitude.

1.3 Response

1. Plot the amplitude of the steady-state part of the solution as a function of ω.
2. The Tesla coil is constructed so that ω (the drive frequency) is the frequency giving maximal voltage amplitude on the capacitor. Find ω_{max}, the frequency at which the amplitude of the steady-state part of the solution is maximal.

1.4 Discharge

Now let us consider the electric discharge through the capacitor plates. When the voltage on the capacitor reaches high enough value, the air between the plates of the capacitor ionizes and becomes highly conductive (resistance $r \ll R$). Consider that the breach happens when the voltage is maximal.

1. Write the differential equation describing the discharge. Use the fact that $r \ll R$.
2. Under what conditions can we also neglect the inductor during the discharge?
3. If we can apply the above approximations, what is the simplified differential equation describing the discharge? What is the solution to this differential equation?
4. On the schema of the Tesla Coil you see in the figure, where is the capacitor C, the resistance r, the resistance R, and the inductor L?

2 Foucault Currents and Inductive Heating

Foucault currents are the currents induced inside the body of conductors due to varying magnetic fields. Industrial systems built around that principle are used for contactless heating, especially when purity of the sample is important. Here we will consider a simplified version of such a system.

2.1 Setup

Consider an infinite solenoid with linear density of loops n and radius R. Constant current I is traversing the solenoid.

1. Find the magnetic field inside the solenoid and prove that the field outside is zero.
2. Consider now the same setup, however with time-dependent current $I(t) = I_0 cos(\omega t)$. Find the electric field induced inside and outside the solenoid.

2.2 Heating

Consider an infinite metal cylinder placed coaxially inside the solenoid. The resistivity of the metal is ρ. The cylinder is of radius r.

1. Find the current density induced in the cylinder in the presence of the electric field from the previous question. Deduce the energy density deposited at each point of the metallic cylinder.
2. What approximations were made thus far? How do you motivate these approximations?

2.3 Power Requirements

What do you need to do in order to calculate the power requirements of such a system? (You are not expected to perform the actual calculation)

3 Comet Trajectory in Dust Cloud

Feel free to use the formulas provided in the appendix.
Consider a homogeneous spherical interstellar cloud of density ρ and radius R.

3.1 Inside the Cloud

1. What is the gravitational field inside and outside the cloud?
2. Consider a comet traveling inside the cloud. The cloud is sufficiently dispersed that the comet does not change its initial mass m. The minimal velocity of the comet on its trajectory is v_0. Its maximal distance from the center of the cloud is $r_0 < R$. The comet is much lighter than the cloud. What is the trajectory (position as a function of time) of the comet?

3.2 Outside the Cloud

Now consider $r_0 > R$. Describe the part of the trajectory that is outside of the cloud (this time you do not need to consider time dependency, just give the trajectory as a geometric figure)?

3.3 Putting Things Together

1. At some point the comet will reach the boundary of the cloud. What is the angle between $\vec{r}_{apo}$ (the radius-vector of the comet at maximal distance from the center of the cloud) and $\vec{r}_{cross}$ (the radius-vector of the comet when crossing this boundary)?

2. What is the angle between two consecutive "apoapsises" (i.e. points of maximal distance from the center of the cloud)?
3. Draw an example trajectory for this system.

4 Fiber Optics Bandwidth

Consider an optical fiber made of a core of radius r and an outer sleeve extending from r to R. The core has refractive index n_0 and the sleeve has a refractive index n_1. The length of the fiber is L.

4.1 Input

1. In order for the optic fiber to work, which should be smaller, n_0 or n_1?
2. What is the maximal angle at which the fiber will accept input (from free space / air)?

4.2 Bandwidth

Consider a light pulse of duration τ. The light is in a divergent beam with an angle of divergence equal to the maximal angle at which the optical fiber accepts input.

1. What is the pulse duration at the end of the fiber?
2. What is the maximal data rate of the fiber (in bits per unit of time)?
3. For $n_{0/1} = 1.3 \textit{ and } 1.8$, $r = 0.5mm$ and both for $L = 1m$ and $L = 1km$, give numeric value for the data rate.
4. How does this value compare with the limit imposed by the wave nature of light (consider red light)?
5. Can we get better data rate if we have three materials instead of just two?

Troisième partie
Annexe

1 Figures

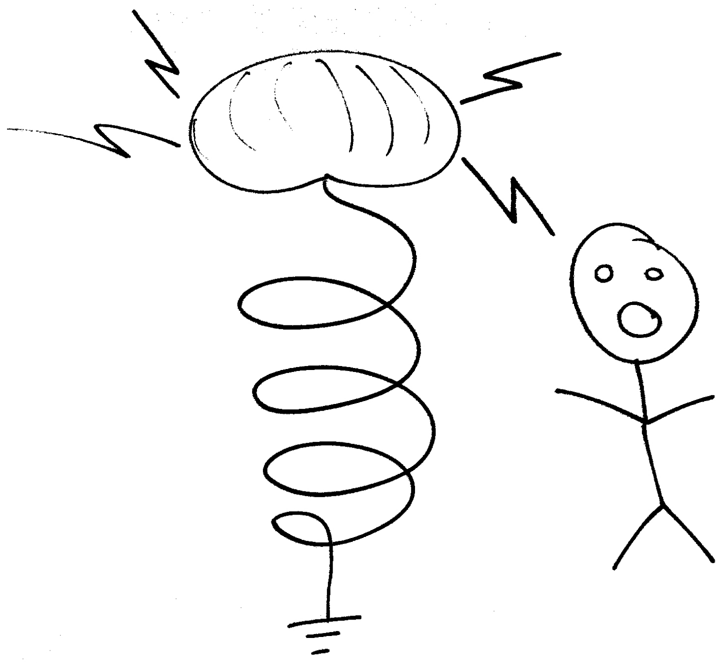

Figure 1 – Schematics of a Tesla Coil

Figure 2 – Picture of a Tesla Coil

2 Tables des formules / Useful formulas

Séries / Series : $\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$

Trigonométrie / Trigonometry : $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$; $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.

Intégrales / Integrals : $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n} + C$; $\int \frac{dx}{x} = \ln(x) + C$; $\int \exp(ax)\, dx = \frac{\exp(ax)}{a} + C$; $\int \sin(ax) = \frac{-\cos(ax)}{a} + C$; $\int \cos(ax) = \frac{\sin(ax)}{a} + C$; $\int_a^b v du = [vu]_a^b - \int_\alpha^\beta u dv$

Équations différentielles / Differential equations :

- Equation : $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = 0$
  - Solution : $x(t) = A\mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t}\ \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\ \omega_0 t + \phi\right)$
  - $A \in \mathbb{R}$, $\phi \in [0, 2\pi]$
- Equation : $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = F_0 \sin(\omega t)$
  - Solution : $x(t) = \frac{F_0}{Z\omega} \sin(\omega t + \psi) + Trans(t)$
  - $Z = \sqrt{(2\omega_0\zeta)^2 + \frac{1}{\omega^2}\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2}$, $\psi = \arctan\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega\omega_0\zeta}\right)$
  - $Trans(t) = A\mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t}\ \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\ \omega_0 t + \phi\right)$, $A \in \mathbb{R}$, $\phi \in [0, 2\pi]$
- *Français :* La solution contient une partie « homogène » ou « transitoire », qui décroît au fil du temps en raison de la présence du terme dissipatif $2\zeta\omega_0 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ et une partie "non homogène" due au terme$F_0 \sin(\omega t)$ qui ne se dégrade pas grâce au forçage continu.
- *English :* The solution contains one part called "homogeneous" or "transient", which decays over time because of the presence of disipative $2\zeta\omega_0 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ term and one "inhomogeneous" part, which is caused by the driving $F_0 \sin(\omega t)$ and does not decay thanks to the continuous forcing.

Complexes / Complex numbers : $\imath^2 = -1$; $\exp(\imath x) = \cos(x) + \imath \sin(\imath x)$; $\overline{(x+\imath y)} = (x - \imath y)$;
$||x + \imath y|| = \sqrt{(x+\imath y)\,\overline{(x+\imath y)}} = \sqrt{(x+\imath y)(x-\imath y)} = \sqrt{x^2+y^2}$

Geométrie / Geometry : $S_{sphere} = 4\pi R^2$, $V_{sphere} = \frac{4}{3}\pi R^3$

Gravitation : $F = G\frac{M_1 M_2}{r^2}$; $E = -G\frac{M_1 M_2}{r}$; $G = 6.7 \times 10^{-11} \mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}}$

Elasticité / Elasticity : $F = -\frac{\Delta L}{L} ES$

Kepler : $\mathbf{F} = \frac{k}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$, $k = GMm$

L'équation de l'ellipse/The equation of an ellipse : $\frac{1}{r} = -\frac{km}{L^2}\left[1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)\right]$; $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{k^2 m}}$; $L = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$